

Streit, Christine; Royar, Thomas

Zahlen, Formen und Beziehungen. Lernen und Lehren von Mathematik im Zyklus 1

Bachmann, Sara [Hrsg.]; Bertschy, Franziska [Hrsg.]; Künzli David, Christine [Hrsg.]; Leonhard, Tobias [Hrsg.]; Peyer, Ruth [Hrsg.]: *Die Bildung der Generalistinnen und Generalisten. Perspektiven auf Fachlichkeit im Studium zur Lehrperson für Kindergarten und Primarschule. Festschrift für Frau Prof. Dr. Charlotte Müller. Bad Heilbrunn : Verlag Julius Klinkhardt 2021, S. 102-120. - (Studien zur Professionsforschung und Lehrerbildung)*



Quellenangabe/ Reference:

Streit, Christine; Royar, Thomas: Zahlen, Formen und Beziehungen. Lernen und Lehren von Mathematik im Zyklus 1 - In: Bachmann, Sara [Hrsg.]; Bertschy, Franziska [Hrsg.]; Künzli David, Christine [Hrsg.]; Leonhard, Tobias [Hrsg.]; Peyer, Ruth [Hrsg.]: *Die Bildung der Generalistinnen und Generalisten. Perspektiven auf Fachlichkeit im Studium zur Lehrperson für Kindergarten und Primarschule. Festschrift für Frau Prof. Dr. Charlotte Müller. Bad Heilbrunn : Verlag Julius Klinkhardt 2021, S. 102-120 - URN: urn:nbn:de:0111-pedocs-222079 - DOI: 10.25656/01:22207*

<https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0111-pedocs-222079>

<https://doi.org/10.25656/01:22207>

in Kooperation mit / in cooperation with:



<http://www.klinkhardt.de>

Nutzungsbedingungen

Dieses Dokument steht unter folgender Creative Commons-Lizenz: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.de> - Sie dürfen das Werk bzw. den Inhalt unter folgenden Bedingungen vervielfältigen, verbreiten und öffentlich zugänglich machen sowie Abwandlungen und Bearbeitungen des Werkes bzw. Inhaltes anfertigen: Sie müssen den Namen des Autors/Rechteinhabers in der von ihm festgelegten Weise nennen. Dieses Werk bzw. der Inhalt darf nicht für kommerzielle Zwecke verwendet werden. Die neu entstandenen Werke bzw. Inhalte dürfen nur unter Verwendung von Lizenzbedingungen weitergegeben werden, die mit denen dieses Lizenzvertrages identisch oder vergleichbar sind. Mit der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

This document is published under following Creative Commons-License: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.en> - You may copy, distribute and transmit, adapt or exhibit the work in the public and alter, transform or change this work as long as you attribute the work in the manner specified by the author or licensor. You are not allowed to make commercial use of the work. If you alter, transform, or change this work in any way, you may distribute the resulting work only under this or a comparable license.

By using this particular document, you accept the above-stated conditions of use.



Kontakt / Contact:

peDOCS
DIPF | Leibniz-Institut für Bildungsforschung und Bildungsinformation
Informationszentrum (IZ) Bildung
E-Mail: pedocs@dipf.de
Internet: www.pedocs.de

Mitglied der

Leibniz
Leibniz-Gemeinschaft

**Studien zur Professionsforschung
und Lehrerbildung**



**Sara Bachmann / Franziska Bertschy
Christine Künzli David / Tobias Leonhard
Ruth Peyer
(Hrsg.)**

Die Bildung der Generalistinnen und Generalisten

**Perspektiven auf Fachlichkeit im Studium zur
Lehrperson für Kindergarten und Primarschule**

Bachmann / Bertschy / Künzli David /
Leonhard / Peyer

**Die Bildung der Generalistinnen
und Generalisten**

Studien zur Professionsforschung und Lehrerbildung

Herausgegeben von
Till-Sebastian Idel, Manuela Keller-Schneider,
Katharina Kunze und Christian Reintjes

Sara Bachmann
Franziska Bertschy
Christine Künzli David
Tobias Leonhard
Ruth Peyer
(Hrsg.)

Die Bildung der Generalistinnen und Generalisten

Perspektiven auf Fachlichkeit im Studium zur
Lehrperson für Kindergarten und Primarschule

*Festschrift für Frau Prof. Dr. Charlotte Müller
anlässlich ihrer Emeritierung als Leiterin
des Instituts Kindergarten-/Unterstufe*

Verlag Julius Klinkhardt
Bad Heilbrunn • 2021

k

Die Herausgabe des Bandes wurde von der Pädagogischen Hochschule FHNW finanziert.

Dieser Titel wurde in das Programm des Verlages mittels eines Peer-Review-Verfahrens aufgenommen. Für weitere Informationen siehe www.klinkhardt.de.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation
in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten
sind im Internet abrufbar über <http://dnb.d-nb.de>.

2021.ig. © by Julius Klinkhardt.

Foto Umschlagseite 1: © Theo Gamper, Solothurn/Tobias Leonhard.

Druck und Bindung: AZ Druck und Datentechnik, Kempten.

Printed in Germany 2021.

Gedruckt auf chlorfrei gebleichtem alterungsbeständigem Papier.



Die Publikation (mit Ausnahme aller Fotos, Grafiken und Abbildungen) ist veröffentlicht unter der Creative Commons-Lizenz: CC BY-NC-SA 4.0 International
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

ISBN 978-3-7815-5860-1 digital

doi.org/10.35468/5860

ISBN 978-3-7815-2455-2



Prof. Dr. Charlotte Müller
Leiterin des Instituts Kindergarten-/Unterstufe
der Pädagogischen Hochschule FHNW von 2009 bis 2021

Inhaltsverzeichnis

Vorworte

Sabina Larcher Klee
 ‚Vielfachlichkeit und Eigensinniges‘ 9

*Sara Bachmann, Franziska Bertschy, Christine Künzli David,
 Tobias Leonhard und Ruth Peyer*
 „Ich will jetzt endlich mal die Plots sehen!“ 11

Teil 1: Einführung und Problemaufriss

*Sara Bachmann, Franziska Bertschy, Christine Künzli David,
 Tobias Leonhard und Ruth Peyer*
 Die Bildung der Generalistinnen und Generalisten
 Einleitung, Problemaufriss und Fragehorizont 17

Teil 2: Fachliche Perspektiven auf generalistische Handlungsanforderungen

Barbara Wjss
 Flirten mit der Vernunft
 Weltzugang und Welterzeugung durch Ästhetische Bildung
 Bildnerisches und Technisches Gestalten im Zyklus 1 41

*Elke Gramespacher, Susanne Störch Mehring,
 Zita Bucher und Claudia Klostermann*
 Bewegungsbildung für Kinder:
 Für „Generalistinnen“ und „Generalisten“ nicht nur eine
 sportdidaktische Herausforderung! 63

Mathilde Gyger
 Zugänge zur Welt: sprachlich realisiert und didaktisch reflektiert
 Sprachliche Bildung im Zyklus 1 85

Christine Streit und Thomas Royar

Zahlen, Formen und Beziehungen

Lernen und Lehren von Mathematik im Zyklus 1 102

Jürg Zurmühle

Musik im Kindergarten und in der Unterstufe der Primarschule 121

Franziska Bertschy

Vielperspektivität und Perspektivenverbindung

Bildungsprozesse im Sachunterricht ermöglichen 141

Teil 3: Konzeptionen zur Stiftung einer professionsspezifischen Kultur von Fachlichkeit für den Zyklus 1

Christine Künzli David und Edwin J. de Sterke

Mehr als Fachlichkeit

Transversales Unterrichten als Spezifik einer Didaktik des Zyklus 1

und als verbindendes Konzept im Studiengang für Lehrpersonen
dieser Stufe 165

Tobias Leonhard

Fachlichkeit in zwei Praxen zur Geltung bringen

Beiträge der Berufspraktischen Studien zur fachlichen

Professionalisierung von Lehrpersonen des Zyklus 1 194

Anja Blechschmidt und Leticia Venâncio

Im Team für ALLE Kinder in der inklusiven Bildung unterwegs 210

Nachwort

Tobias Leonhard im Gespräch mit Charlotte Müller

Dem Eigensinn Raum geben

Annotationen zu Bildung in Kindergarten, Schule und Hochschule 231

Autorinnen- und Autorenverzeichnis 249

Christine Streit und Thomas Royar

Zahlen, Formen und Beziehungen

Lernen und Lehren von Mathematik im Zyklus 1

1 Einleitung

Mathematik ist eine von mehreren Arten, die Welt wahrzunehmen, zu repräsentieren und zu beschreiben. Galileo Galilei schrieb vor fast 400 Jahren: „Das Buch der Natur ist mit der Sprache der Mathematik geschrieben.“ (Galileo Galilei 1623, zitiert nach Behrens 2010, 53) Mit Worten lässt sich beschreiben, in welcher Bahn die Planeten unseres Sonnensystems die Sonne umkreisen und welche Rolle die Anziehungskraft dabei spielt. Aber erst mathematische Berechnungen erlauben fokussierte und präzise Aussagen darüber, wie stark die Anziehungskraft zwischen den unterschiedlichen Himmelskörpern ist und mit welcher Geschwindigkeit die Planeten die Sonne umkreisen. Selbst Vorhersagen sind anhand mathematischer Zugänge möglich: So lässt sich exakt berechnen, wann genau die nächste Sonnenfinsternis stattfinden wird. Die Bedeutung der Mathematik als Anwendungswissenschaft ist unbestritten, wie auch in dem folgenden Zitat des Nobelpreisträgers Roger Penrose (2010, XXVII) deutlich wird: „Wir können die Gesetze, die die physikalische Welt beherrschen, nicht verstehen, ohne die Mathematik zu kennen.“ Auch ganz einfache Probleme und Aktivitäten im Alltag sind ohne Mathematik nicht zu bewältigen: Zahlen und Grössen sind aus unserer Lebenswelt ebenso wenig wegzudenken wie der Umgang mit geometrischen Formen und Mustern. Die Aussage eines Vierjährigen „Ich möchte auch so viele Bonbons haben wie Leon“ verdeutlicht, wie selbstverständlich bereits junge Kinder im Alltag „Mathematik betreiben“. Zugleich zeigt sich schon bei sehr jungen Kindern, dass mathematisches Denken und Tätigsein nicht nur in Anwendungssituationen eine Rolle spielt, sondern das Betreiben von Mathematik auch „zweckfrei“ und damit ohne direkten Anwendungsbezug erfolgen kann. Wenn Kinder selbstvergessen beim Bauen mit farbigen Würfeln immer wieder einer bestimmten Regel folgen und bestimmte Strukturen und Eigenschaften des Materials nutzen, um schliesslich ein Produkt zu erzeugen, in dem Erwachsene ein spezielles Muster oder ein klar strukturiertes Bauwerk wie z.B. eine quadratische Pyramide erkennen, dann weist dies darauf hin, dass wir einen „intuitiven“ Zugang zur Welt der Mathematik besitzen, einer Disziplin, die gern auch als die Wissenschaft der Muster und Strukturen beschrieben wird (z.B. Devlin 1998).

Der Beitrag gibt zunächst einen Einblick in das „Wesen“ der Mathematik und darüber, wie die Mathematik im menschlichen Denken verankert ist (Abschnitt 2). Anschliessend wird aufgezeigt, an welchen fundamentalen Ideen sich das „Wesen“ der Mathematik exemplarisch erfahren lässt (Abschnitt 3) und welche Zugänge zur Mathematik sich daraus ableiten lassen (Abschnitt 4). Mit Blick auf den Zyklus 1 wird in Abschnitt 5 der Aufbau mathematischer Konzepte bei Kindern am Beispiel quantitativer Teile-Ganzes-Beziehungen und in Abschnitt 6 die Aufgaben der Lehrperson bei der Begleitung dieser Prozesse erläutert. Daraus ergibt sich die Frage, wie eine Konzeption von mathematikdidaktischen Studien im Rahmen einer Ausbildung von Generalistinnen und Generalisten aussehen kann (Abschnitt 7). Der Beitrag schliesst mit einer Diskussion über die damit verbundenen Herausforderungen für die Ausbildung herangehender Lehrpersonen aus mathematikdidaktischer Perspektive (Abschnitt 8).

2 Das „Wesen“ der Mathematik

Mathematik als Wissenschaft ist streng deduktiv, ihre Erkenntnisprozesse zeichnen sich aus durch einen hohen Grad an argumentativer Strenge und das damit verbundene Streben nach Widerspruchsfreiheit, aber auch nach Verallgemeinerung. Sie gründet sich auf wenige, als „wahr“ angenommene Grundsätze (wie z.B. „Jede natürliche Zahl hat genau einen Nachfolger“), sogenannte Axiome, und leitet daraus durch das formale Beweisen eine komplexe, in sich logische Gedankenwelt ab. Ihren Ursprung nahm die Mathematik wahrscheinlich u.a. im Umgang und der Beschäftigung der Menschen mit Anzahlen, mit Messen, mit Konstruieren – jeweils aus dem Bedürfnis bzw. der Notwendigkeit heraus, sich mit Alltagsproblemen, Naturphänomenen usw. auseinanderzusetzen und die Dimensionen „Raum“ und „Zeit“ näher beschreiben zu können. Es gehört aber zu den faszinierenden Eigenheiten der Mathematik, dass sie sich von physisch beobachtbaren Aspekten lösen kann. Dieser Aspekt der Mathematik zeigt sich ebenfalls früh in der Menschheitsgeschichte: So geben Knochenfunde aus der Jungsteinzeit bereits Hinweise auf „arithmetische“ Spielereien, die nach heutigen Erkenntnissen keinen Anwendungsbezug aufweisen (Huylebrouck 2006). Bei solchen „innermathematischen“ Tätigkeiten geht es im Kern um das Untersuchen und das Beschreiben von Strukturen und Beziehungen, die zwischen abstrakten Objekten bestehen.

Erkenntnisse in der Mathematik als Wissenschaft werden nicht durch Beobachtung der Realität oder durch Experimente gewonnen (wie dies z.B. in den Naturwissenschaften der Fall ist), sondern sie werden generiert in einer eigenen „theoretischen“ Welt. Allein die Mathematik ist in der Lage, „endgültige“ Aussagen

zu machen, wenn auch „nur“ im Rahmen ihrer eigenen Prämissen (Wittmann 2003). Die Gegenstände der Mathematik sind abstrakte Ideen bzw. gedankliche Konstrukte. Auch wenn man scheinbare Entsprechungen in der realen Welt finden kann, so sind sie ausnahmslos abstrakter Natur. Mathematische Ideen können reale Sachverhalte beschreiben, aber reale Objekte können immer nur näherungsweise „quadratisch“, „symmetrisch“ oder „gleich lang“ sein, sie können nur Modelle mathematischer Objekte darstellen:

In der physischen Welt gibt es kreisförmige Gegenstände – der Kreis als ideale geometrische Figur bildet sich in unseren Gedanken. Ebenso ist die Zahl Drei ein Gedankengebilde, das beim Anblick von drei Personen oder drei Gegenständen abgerufen wird. Die Beobachtung, dass die Zahl Drei keine echten Teiler hat, kann noch durch Hantieren mit konkretem Material gewonnen werden, erfordert aber bereits eine eindeutige Begrifflichkeit. Die Einsicht, dass die Folge der Primzahlen nicht abbricht, ist eine Denknötwendigkeit, die aus einer entsprechenden Analyse der Teilbarkeitsrelation erwächst. Sie ist nicht mehr an praktischen Tätigkeiten ablesbar, sondern wird in der gedachten Welt der Zahlen mit den ihr innewohnenden Strukturen vollzogen. (Hefendehl-Hebeker 1999, 105)

Mithilfe der Sprache verständigen wir uns über mathematische Ideen. So setzt z.B. die bewusste Verwendung des Wörtchens „auch“ bereits eine Idee von Kategorie (es ist notwendig, zwei Bereiche gegeneinander abzugrenzen) und Beziehung (in diesem Fall eine bestimmte Analogie) voraus. Unsere (Alltags-)Sprache ist allerdings nur bedingt in der Lage, mathematische Ideen und Konstrukte angemessen zu beschreiben (sie ist einerseits zu vieldeutig und damit zu unpräzise, andererseits fehlen ihr „passende“ Begriffe). Aus diesem Grund wurden im Laufe der Zeit formale Systeme entwickelt – eine mathematische Symbolsprache. Damit wurde ein Werkzeug geschaffen, mit dem man mathematische Ideen beschreiben, begründen und weiterentwickeln kann. (Hefendehl-Hebeker 1999)

Die Verständigung über mathematische Inhalte geschieht über vereinbarte Symbole. Bezogen auf die mathematische Idee „Zahl“ bestehen die zugehörigen symbolischen Zeichen – im westlichen Sprachraum – aus den Ziffern 0 bis 9. Dabei ist zu unterscheiden zwischen den Bezeichnungen „Zahl“ als nicht konkret wahrnehmbarer Idee und „Ziffer“ als einer Möglichkeit der symbolischen Zahldarstellung. Mit einer endlichen Anzahl von Ziffern (in unserem Dezimalsystem zehn) kann jede (natürliche) Zahl in unserem Stellenwertsystem eindeutig dargestellt werden. Die Ziffer bzw. die Ziffernfolge symbolisiert aber nur die dahinterstehende mathematische Idee und ist nicht mit dieser gleichzusetzen – Mathematik betreiben wir erst, wenn wir die Symbole „lesen“ können und eine Vorstellung von dem abstrakten Objekt „Zahl“ aufgebaut haben:

Um mit dem Symbol ‚7‘ die Zahl Sieben darzustellen, müssen wir zunächst diese Zahl Sieben als ein Etwas, eine Einheit oder ein Ganzes wahrnehmen; um mit dem Buchsta-

ben n eine beliebige natürliche Zahl zu symbolisieren, brauchen wir erst ein Konzept dafür, was wir unter einer „natürlichen Zahl“ verstehen. Das Symbol erlaubt uns, über unser Konzept nachzudenken und es zugleich zu bearbeiten. (Devlin 2001, 25)

Zum Konzept der Zahl gehört dann u.a. auch, dass wir in der Ziffernfolge 368 die Zahl „dreihundertachtundsechzig“ in ihrer Stellenwertwertdarstellung erfassen: also „3 mal 100 plus 6 mal 10 plus 8 mal 1“.

Eng verbunden mit dem Aufbau solcher Konzepte ist die Fähigkeit, mathematisch zu denken. Jetter (1982) fasst darunter die Fähigkeit zum Erkennen von Beziehungsgefügen zwischen (abstrakten) mathematischen Objekten, aber auch die Fähigkeit zur Verallgemeinerung sowie zur Verkürzung von Gedankengängen. Mathematisches Denken im engeren Sinne beginnt demnach erst, wenn die Loslösung von den materiellen Eigenschaften und den konkreten Sachverhalten erfolgt ist, wir also vom sinnlich Wahrgenommenen abstrahieren können. „Je abstrakter, desto weiter entfernt von der Anschaulichkeit“ (Freudenthal, 1973, 35) und je weniger anschaulich, desto weniger können wir uns etwas darunter vorstellen – so lautet eine gängige alltagstheoretische Annahme. Allerdings bedeutet Abstraktion auch immer Vereinfachung im Sinne der Fokussierung auf das Wesentliche. Genau dies lässt die Objekte der Mathematik dann wieder selbstverständlich und „klar“ erscheinen (Basieux 2000).

3 Fundamentale Ideen der (Schul-)Mathematik

„Strenge“, also rein deduktive Mathematik, wird in der Schule erst (wenn überhaupt) in der Sekundarstufe 2 thematisiert. Das Lernen von Mathematik beginnt aber bereits weit vor Schulbeginn und wird heute zunehmend im Sinne einer lebenslangen Bildungskette postuliert (Heinze/Grüßing 2009). Es stellt sich also die Frage, wie das mathematische Denken der Kinder gefördert werden kann und welche Konzepte so zentral sind, um daran das Wesen der Mathematik exemplarisch erfahren zu können. Hierauf kann das Konstrukt der „fundamentalen Ideen“ eventuell eine Antwort liefern. „Fundamentale Ideen der Mathematik“ sollen zu einem besseren Verständnis der Mathematik beitragen und über die Jahrgangsgrenzen hinaus im Mathematikunterricht kontinuierlich Beachtung finden. Der Begriff der „fundamentalen Ideen“ geht ursprünglich auf Jérôme Bruner (1973) zurück. Bruner ging davon aus, dass „jedem Kind auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form gelehrt werden kann“ (Bruner 1973, 47). Dazu sei es wichtig, auf „fundamentale Ideen“ des Faches zu fokussieren und diese spiralförmig weiterzuentwickeln.

In der Mathematikdidaktik wurden diese Überlegungen aufgegriffen und weiterentwickelt. Fundamentale Ideen der (Schul-)Mathematik zeichnen sich u.a. durch folgende Eigenschaften aus (z.B. Vohns 2007):

- Fundamentale Ideen machen abstrakte mathematische Objekte und Methoden erfahrbar und leisten somit einen Beitrag zur Beantwortung der Frage, was Mathematik überhaupt ist bzw. ausmacht.
- Sie sind nicht ausschliesslich in einzelnen Inhaltsbereichen angesiedelt, sondern weisen inner- und/oder aussermathematische Bezüge auf.
- Sie sind sinnstiftend, wodurch das Verstehen von Zusammenhängen erleichtert wird.

Für den Mathematikunterricht der Primarschule zeigt Winter (2001) exemplarisch sieben fundamentale Ideen auf, die anschlussfähig für das weitere mathematische Lernen sind und deren Bedeutung auch bereits für das mathematische Lernen im Kindergarten sichtbar ist (Streit 2010): Neben der bereits in Abschnitt 2 erwähnten Idee der „Zahl und ihrer Darstellung im Stellenwertsystem“ gehören dazu „Teile-Ganzes-Beziehungen“, „Symmetrie“, „Messen“, „Algorithmus“, „Näherung“ und „Funktion“. Mit Blick auf Zyklus 1 wird im Folgenden die fundamentale Idee „Teile-Ganzes-Beziehungen“ näher erläutert.

Die Teile-Ganzes-Beziehung beschreibt eine Beziehung zwischen den Teilen und dem Ganzen. Es geht dabei stets darum, zu erkennen, in welcher Beziehung das Ganze und die Teile zueinander stehen bzw. wie sich das Ganze aus den Teilen konstituiert. So besteht die Zahl 6 (das Ganze) aus den Teilen „5 und 1“ oder „3 und 3“ oder ... Diese Beziehungen sind allerdings nicht sinnlich erfahrbar, sondern sie müssen vom Individuum konstruiert werden (Schäfer 2012). Auch wenn wir mit konkreten Materialien wie z.B. Muggelsteinen arbeiten und daraus ein 3x3-Muster erzeugen, müssen sich die Betrachtenden die intendierte Struktur hineindenken: Es handelt sich um mehrere gleiche Teile (hier die Faktoren), aus denen sich das Ganze (hier das Produkt) konstituiert. Teile-Ganzes-Beziehungen spielen für das Verständnis vieler mathematischer Unterrichtsinhalte eine wichtige Rolle. Dies können Kinder schon früh im handelnden Umgang mit Materialien erfahren: Geometrische Formen beispielweise lassen sich in unterschiedliche Teilformen zerlegen bzw. zu neuen Formen zusammensetzen. Dabei weisen das Ganze wie auch die Teile bestimmte Eigenschaften auf, mit deren Hilfe sich die Beziehungen zwischen dem Ganzen und den Teilen beschreiben lassen. Abbildung 1 zeigt unterschiedliche Zerlegungen und Zusammensetzungen eines regelmässigen Sechsecks. Betrachtet man die Innenwinkel und die Seitenlängen der in Abbildung 1 gezeigten Figuren genauer, so stellt man erstens fest, dass deren Innenwinkel 60° bzw. ein Vielfaches von 60° aufweisen, und zweitens, dass die Seitenlängen der Figuren gleich sind – einzig beim Trapez ist die Grundseite doppelt so lang

wie die anderen drei Seiten. So lässt sich das Sechseck durch vielfältige Kombinationen aus verschiedenen Teilfiguren erzeugen.

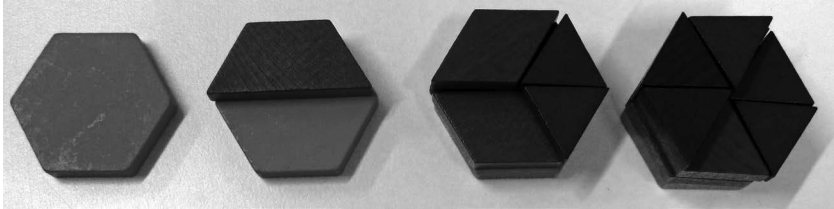


Abb. 1: Teile und Ganze im regelmässigen Sechseck

Wittmann (2014) nennt darüber hinaus das Beweisen als eine umfassende fundamentale Idee. Dabei betont er, dass Mathematik nicht nur als Ansammlung von wahren Aussagen verstanden werden dürfe, sondern dass deren Genese ein unverzichtbarer Teil sei. Damit weist Mathematik neben dem Produktcharakter immer auch einen Prozesscharakter auf (Brunner 2014). Auch im wissenschaftlichen Kontext erfolgt der formal-deduktive Beweis oft erst in der Retroperspektive. Praktizierende Mathematiker*innen agieren beim Suchen nach Vermutungen und Beweisen durchaus auch induktiv, ihr Vorgehen umfasst inhaltlich-anschauliche Argumente, bildliche Darstellungen und zeigt nicht selten zunächst sogar Beweislücken (Jahnke/Ufer 2015). Beweisen in der Schule fokussiert primär auf den Prozesscharakter des Beweisens, der allgemein in der Tätigkeit des Begründens (und der damit verbundenen Frage nach dem Warum) sichtbar wird, und umfasst das Spektrum zwischen (alltäglichem) Argumentieren und formalem Beweisen (Brunner 2014). „Ohne die Frage nach dem WARUM kann ein Unterricht kein authentischer Mathematikunterricht sein, denn diese Frage ist für das ‚Mathematik treiben an sich‘ zentral“ (Meyer/Prediger 2009, 7).

Lindmeier, Brunner, Grüßing und Heinze (2017) beschreiben bereits für den Kindergarten elementare Anforderungen mathematischen Argumentierens, nämlich das „Erkennen relevanter Strukturen in mathematischen Situationen“ sowie „das Nutzen derselben zur Erklärung mathematischer Zusammenhänge“ (ebd., 610). Für den Mathematikunterricht in der Primarschule betont Wittmann (2014) die Bedeutung von sogenannten inhaltlich-anschaulichen Beweisen, die zwar nicht formaler Strenge genügen, aber den Aspekt der Verallgemeinerbarkeit aufgreifen, wie folgendes Beispiel deutlich macht:

Die Aussage „Wenn ich zwei ungerade Zahlen addiere, erhalte ich immer eine gerade Zahl“ kann man mit Beispielen belegen: $5 + 7 = 12$, $13 + 221 = 234$, $1000009 + 4456133 = 5456142$ usw. Diese Belege bleiben aber an die Beispiele

gebunden, die Aussage ist nicht verallgemeinerbar. Letzteres gelingt algebraisch, aber auch mithilfe eines inhaltlich-anschaulichen „Beweises“ (vgl. Abb. 2).

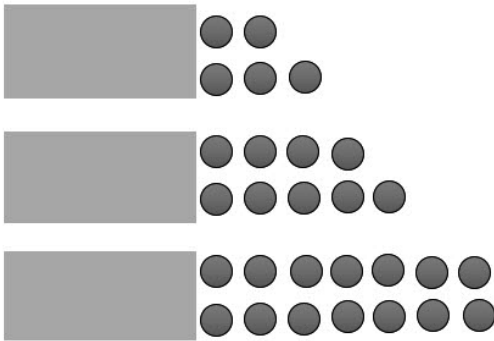


Abb. 2: Inhaltlich-anschaulicher „Beweis“ der Behauptung „Die Summe zweier ungerader Zahlen ist stets gerade“

Abbildung 2 „beweist“, dass „ungerade Zahl plus ungerade Zahl gleich gerade Zahl“ ist. Allerdings muss man akzeptieren, dass die oben abgebildeten fünf und neun grauen Punkte allgemein für zwei ungerade Zahlen stehen (das graue Rechteck visualisiert die Fortsetzbarkeit der Punktbilder) und sich jede gerade Zahl als „Doppelreihe“ und jede ungerade Zahl als „Doppelreihe mit Einzelpunkt“ darstellen lässt. Des Weiteren muss man anerkennen, dass das „Zusammenfügen der Punktbilder“ der Addition zweier natürlicher Zahlen entspricht und so eine neue Punktreihe entsteht, die die Summe der beiden ungeraden Zahlen darstellt. Dann aber kann man mithilfe des Bildes und unabhängig von der Form der Elemente „sehen“, dass „ungerade plus ungerade gleich gerade“ ist (Nelsen 2016).

4 Zugänge zur Mathematik – Anwendung und Struktur

Das mathematische Denken von Kindern beginnt schon lange vor dem Schuleintritt: Kinder machen bereits in den ersten Lebensjahren Erfahrungen mit Raum und Zeit; sie beobachten und erleben verschiedene Formen und Grössen und erschliessen die Bedeutung von (An-)Zahlen in ihrer konkreten Lebenswelt. Schon früh erkunden Kinder ihre belebte und unbelebte Umwelt und zeigen dabei vielfältige Aktivitäten wie Vergleichen, Ordnen und Messen. Der Zugang zur (abstrakten) Welt der Mathematik ist dementsprechend vielfältig: Er kann

über konkrete Anwendungssituationen, aber auch über das Entdecken und das Beschreiben von Regelmässigkeiten und Beziehungen, also gewissermassen „innermathematisch“, erfolgen. Die sogenannte Anwendungsorientierung verbindet mathematische Inhalte mit für Kinder bedeutsamen Alltagssituationen und -kontexten. Dabei werden einerseits Modelle der realen Welt genutzt, um Vorstellungen von mathematischen Ideen aufzubauen; andererseits können mathematische Überlegungen auch dazu dienen, konkret erfahrbare Alltagsprobleme zu lösen. Die Strukturorientierung zielt dagegen auf das Finden und das Beschreiben von Gesetzmässigkeiten und Beziehungen, die über die konkreten Phänomene hinausweisen, also auf die mathematische Struktur (Royer/Streit 2010; Winter 1994).

Für das frühe Lernen von Mathematik bedeutet dies, dass mathematische Prinzipien einerseits im Alltag bewusst erfahren werden können, andererseits als rein gedankliches Konstrukt auch ohne Anwendungsbezug und in sich selbst sinnstiftend erfahren werden können. Dies lässt sich an dem in der Einleitung aufgeführten Beispiel „Bonbons“ verdeutlichen: Eine Tüte Bonbons regt die Kinder vielleicht dazu an, die Bonbons „gerecht“ an eine bestimmte Anzahl von Kindern zu verteilen („Ich möchte auch so viele Bonbons haben wie ...“). Damit ergibt sich zunächst eine anwendungsorientierte Lernsituation. Wenn die Kinder nun aber beginnen, die Bonbons in Zehnerreihen anzuordnen, um die Gesamtanzahl zu bestimmen oder mit den Bonbons ein Muster zu legen (immer zwei rote, dann drei grüne, dann vier gelbe usw.), dann agieren die Kinder zwar immer noch mit Alltagsmaterialien, aber jetzt steht nicht mehr das konkrete Material, sondern etwas Strukturhaftes im Mittelpunkt. Statt Bonbons könnten nun auch bunte Steinchen oder vergleichbare Gegenstände verwendet werden. Die Bonbons selbst werden dann zugleich mehr und weniger: Einerseits werden sie nun primär als Medium verwendet, andererseits treten bestimmte Eigenschaften (wie der Geschmack) in den Hintergrund.

Beides, Struktur und Anwendung, ist zentral, um Kindern den Zugang zum mathematischen Denken und Verständnis zu erleichtern. Dabei erscheint der Zugang über die Anwendungsorientierung zunächst als der „kindgemässere“, weil er unmittelbar mit der Lebenswelt der Kinder in Zusammenhang gebracht wird. Diesbezüglich ist allerdings zu beachten, dass im Kindesalter nur sehr wenige mathematische Modelle (also z.B. Terme, Gleichungen, Funktionen) zur Verfügung stehen, um reale Probleme lösen zu können. Entsprechend weisen vermeintlich anwendungsorientierte Aufgaben oft keinen echten Anwendungsbezug auf. Wenn die Kinder z.B. beim Thema „Winter“ im Kindergarten auf einer bildlichen Darstellung des Märchens „Frau Holle“ den Auftrag erhalten, die Schneeflocken auf dem Bild zu zählen, dann fehlt dieser Situation jegliche Authentizität. Es handelt sich um eine reine „Einkleidung“, die keinen echten Anwendungsbezug hat und demnach auch nicht dazu dient, Alltagsprobleme zu lösen. Echte Anwendungs-

situationen erfahren Kinder z.B. in Rollenspielen im Kontext von Einkaufssituationen oder im alltäglichen Umgang mit zählbaren Objekten („Haben wir genug Löffel für alle Kinder?“).

Das Umgehen mit Strukturen und Mustern entspricht dem natürlichen Bedürfnis des Kindes, zu ordnen und Muster zu erzeugen. Der Begriff „structure sense“ (Linchevski/Livneh 1999; Lüken 2012) verweist auf die (wahrscheinlich angeborene) Leichtigkeit und Beweglichkeit im Umgang mit Mustern und Strukturen. Im Umgang mit Materialien wie Spielwürfeln, Muggelsteinen usw. lässt sich dieser „Mustersinn“ beim Kind hervorragend beobachten und durch geeignete Impulse anregen (Royar/Streit 2010; Streit 2016a). „Der strukturorientierte, ‚reine‘ Aspekt der Mathematik ist somit schon früh ein unverzichtbares Element des Mathematiklernens. Wenn er fehlt, wird das Bild der Mathematik verfälscht und der Unterricht kann nicht seinen vollen Bildungswert entfalten.“ (Wittmann 2003, 27)

5 Wie Kinder mathematische Vorstellungen aufbauen – am Beispiel quantitativer Teile-Ganzes-Beziehungen

Im Folgenden wird am Beispiel der Verbindung zweier fundamentaler Ideen der Mathematik (Zahl und Teile-Ganzes-Beziehung, vgl. Abschnitt 3) aufgezeigt, wie Kinder auf der Basis intuitiver Fähigkeiten mathematische Vorstellungen aufbauen: Das Verständnis für Teile-Ganzes-Beziehungen spielt vor allem im Kontext des Zahlbegriffs eine zentrale Rolle, ist aber wahrscheinlich auch wichtig für den Vorstellungsaufbau in anderen Gebieten der Mathematik, z.B. der Geometrie. Verschiedene Untersuchungen zeigen, dass wir Menschen über intuitive Fähigkeiten zum Wahrnehmen und Unterscheiden von (kleinen) Mengen bzw. Anzahlen verfügen – den sogenannten „Zahlensinn“ (z.B. Wynn 1990; für einen Überblick vgl. Dehaene 1999). So haben bereits sehr junge Kinder ein Verständnis von Mengen, ohne dass sie schon in der Lage sind, genaue Anzahlen durch ein (Ab-)Zählen zu ermitteln. Sie können kleine Mengen vergleichen, erfassen Mengenveränderungen und erkennen intuitiv, dass sich eine Menge auf verschiedene Weisen in zwei Teilmengen zerlegen lässt, ohne dass sich die Gesamtmenge selbst ändert (Teile-Ganzes-Schema). Man spricht auch von sogenannten protoquantitativen Schemata (Resnick 1983).

Kleine Anzahlen bis 3 können Kinder in der Regel schon sehr früh auf einen Blick, d.h. ohne zu zählen, erfassen. Eine exakte Anzahlbestimmung grösserer Mengen als 3 wird zunehmend über das Zählen möglich. Zur Zählfertigkeit gehört u.a. das Aufsagen der Zahlwortreihe, sie ist aber weit mehr als das. Um Dinge abzuzählen, muss das Kind die Eins-zu-Eins-Zuordnung von Zahl und Objekt beherrschen und zugleich verstehen, dass das zuletzt genannte Zahlwort nicht

nur die Position des Elements in der Reihe, sondern zugleich die Objektanzahl angibt. Die Zahlwortreihe beherrschen die Kinder, wenn sie auch von einer beliebigen Zahl aus weiter-, rückwärts und in Schritten zählen können. Dies gelingt dann gut, wenn die Zahlwortreihe nicht wie ein Zahlenvers oder das Alphabet nur auswendig gelernt ist, sondern die Zahlen eine Bedeutung erhalten und die Beziehungen zu den anderen Zahlen erkannt werden (z.B. „3 kommt vor 4“, „5 ist zwei mehr als 3“ usw.).

Eine wichtige Voraussetzung für die Entwicklung einer tragfähigen Vorstellung von Zahlen und das flexible Umgehen mit Rechenoperationen ist die strukturierte Mengenvorstellung. Die Grundidee des Strukturierens und Bündelns (z.B. „immer 10“) liegt unserem Zahlssystem zugrunde. Das Stellenwertsystem mit Positionen für Einer, Zehner und Hunderter usw. basiert letztendlich darauf. Die Struktur der Finger (Fünfer- und Zehnerstruktur) bildet das Zehnersystem ab. Schon früh wissen Kinder, dass ihre Hände jeweils fünf Finger besitzen. Dieses Wissen können sie nutzen, um durch Zerlegung auch Zahlen zwischen 6 und 10 mit den Fingern zu zeigen, ohne stets beginnend bei eins „durchzählen“ zu müssen. Die 6 wird dann als „5 und 1“, die 7 als „5 und 2“ usw. dargestellt und gedeutet.

Hier kommen nun quantitative Teile-Ganzes-Beziehungen zum Tragen. Das Wissen darüber, dass und wie man Zahlen mithilfe von anderen Zahlen zusammensetzen und zerlegen kann, bezeichnet man als (arithmetisches) Teile-Ganzes-Konzept (Resnick 1992). Das flexible Umgehen mit (An-)Zahlen – etwas dazutun, etwas wegnehmen oder Mengen vergleichen – umfasst wichtige Tätigkeiten, die die Grundlage für ein umfassendes Verständnis von Zahlen – auch in ihrer Darstellung im dezimalen Stellenwertsystem – sowie der Rechenoperationen bilden. Die Addition $59 + 81$ lösen wir sinnvollerweise nicht, indem wir von 59 um 81 weiterzählen, sondern indem wir das Wissen um bestimmte Eigenschaften der Teile und des Ganzen nutzen: Wenn von der einen Teilmenge etwas zur anderen Teilmenge verschoben wird, bleibt das Ganze gleich. Statt $59 + 81$ können wir also auch $60 + 80$ rechnen.

Es ist anzunehmen, dass der Erwerb des Teile-Ganzes-Konzepts eine wichtige Voraussetzung für den Aufbau von mathematischen Konzepten auch in weiterführenden Inhaltsbereichen wie z.B. der Algebra ist. Weitere Hinweise für die Bedeutung des Teile-Ganzes-Konzepts liefert u.a. die Studie von Beutler (2013). Darin zeigte sich bei Vorschulkindern ein Zusammenhang zwischen Strategien der Anzahlbestimmung bzw. der Nutzung arithmetischer Teile-Ganze-Beziehungen und räumlichen Strukturierungsfähigkeiten.

6 Frühe mathematische Lernprozesse begleiten – die Rolle der Lehrperson

Ebenso wie die Grundfähigkeit zum Erwerb von Sprache angeboren ist, die konkrete Ausdifferenzierung aber von Umwelteinflüssen abhängt, ist auch eine Disposition zum Erlernen von Mathematik vorhanden, die ohne entsprechende Anregungen aus der Umwelt allerdings ebenso wenig wie das Lernen von Sprache zur Entfaltung kommen kann. Für den Übergang vom intuitiven Wissen (dazu gehört z.B. die angeborene Fähigkeit zum Erfassen kleiner Anzahlen, siehe auch Abschnitt 5) zur „kulturellen“ Mathematik (z.B. ein umfassendes Zahlverständnis) ist eine professionelle Lernbegleitung notwendig (Stern 2005). Diese umfasst gezielte Instruktionen ebenso wie behutsame Impulse in offenen Settings (Streit/Künzli David/Hildebrandt 2014). Viele Alltagssituationen sind potenziell „mathematikhaltig“, aber sie müssen als Lernanlass entdeckt werden. Gerade der mathematische Aspekt einer Situation ist nicht immer der nächstliegende, was wiederum auch damit zusammenhängt, dass mathematische Begriffe immer theoretischer Art sind. Eine wichtige Aufgabe der Lehrpersonen ist es daher, den Kindern anhand fördernder Geschichten, Situationen, Materialien und Gespräche einen Rahmen zu bieten, innerhalb dessen sich (frühes) mathematisches Lernen vollziehen kann. Auch intuitive, oft noch nicht verbalisierbare mathematische Vorkenntnisse der Kinder können als Anknüpfungspunkt für mathematische Lernanlässe und darauf aufbauende Kommunikationsprozesse im Kindergarten sowie im Anfangsunterricht der Schule dienen. Die Auseinandersetzung mit elementaren mathematischen Fragestellungen in situativen Lernanlässen, fächerübergreifenden Angeboten und materialbasierten mathematischen Lernumgebungen ermöglicht niederschwellige anwendungs- wie strukturorientierte Zugänge zur abstrakten Welt der Mathematik.

Das Tätigsein mit sogenannten „mathematikhaltigen“ Materialien unterstützt dabei insbesondere den strukturorientierten Zugang zur Mathematik und stellt die Voraussetzung dafür dar, dass die Kinder die in der Handlung mit dem Material steckenden mathematischen Ideen bewusst erfahren können. Solche Materialien verfügen über ein mathematisches Potenzial, d.h. sie regen Kinder zu mathematischen Tätigkeiten wie Ordnen, Klassifizieren, Vergleichen, Messen oder Musterlegen an. Des Weiteren zeichnen sie sich dadurch aus, dass sie einerseits eine gewisse Strukturiertheit aufweisen, andererseits aber auch flexibel in der Anwendung und – anders als beispielsweise ein Puzzle oder ein Bausatz – nicht in einem bestimmten Zustand „fertig“ sind (Haug /Wittmann 2013; Royar/Streit 2010). Begleitet durch adäquate Impulse der Lehrperson können so Handlungen verinnerlicht und die für das mathematische Denken zentralen Begriffsbildungsprozesse in Gang gesetzt werden (Royar/Schuler/Streit/Wittmann 2016).

Ein Beispiel aus dem Kindergarten soll dies illustrieren: Im Freispiel bauen die Kinder eine „Burg“ mit quaderförmigen Bauklötzen. Luisa möchte in ihrer Burg auch einen Turm erstellen. Ein Impuls könnte nun sein, anzuregen, der Burg einen „runden“ Turm anzubauen, ohne dass dafür andere als die vorhandenen Klötze verwendet werden. Möglicherweise kommt dieser Impuls auch von den Kindern selbst; hier wäre dann die Aufgabe, diesen als fruchtbar zu erkennen und ihn aufzugreifen. Diese Idee des „Runden aus dem Eckigen“ führt potenziell weiter über die Beschreibung von Figuren und Körpern bis hin zur Erkenntnis, dass ein Kreis mathematisch eher ein „Unendlicheck“ ist als ein „Nulleck“ – lässt er sich doch näherungsweise als regelmässiges n -Eck beschreiben.

In der Schule stehen traditionell gelenkte Settings im Vordergrund, z.B. der Auftrag, bestimmte arithmetische Aufgaben zu lösen. Aber auch in diesem Rahmen sind offene Lernformen üblich: Wenn Kinder z.B. mit Muggelsteinen eigene Zahlbilder für die Zahlen bis 10 legen, kann die Lehrperson die Kinder bei dieser Tätigkeit begleiten, indem sie zunächst beobachtet, ob und inwiefern die Kinder zur Zahldarstellung Strukturen nutzen – z.B. durch räumliche oder farbliche Anordnungen der Muggelsteine, und diese später im Gespräch explizit macht. So beschreibt die sechsjährige Nele ihr Zahlenbild der Sieben nach Aufforderung durch die Lehrperson wie folgt: „Ich lege die 7 wie die 6 vom Würfel – da drei und da drei – und in der Mitte noch eins“. Eine Frage wie „Kannst du die 7 auch noch anders legen?“ kann Nele dabei unterstützen, ihre Anzahl- und Teile-Ganzes-Vorstellungen zu aktivieren und die entsprechenden Konzepte zu festigen. Zahlbilder (wie jene von Nele) können zugleich als Impuls für diejenigen Kinder dienen, die Strukturen in ihren Darstellungen noch nicht aktiv nutzen (können).

Entscheidend ist damit eine professionelle Begleitung durch die Lehrperson, die sich nicht auf disziplinäre, organisatorische oder enge inhaltliche Anweisungen beschränkt, sondern die Kinder zu weiterführenden Denkschritten anregt. Eine solch kognitiv anregende und von den individuellen Vorkenntnissen der Kinder ausgehende Lernunterstützung findet in der Praxis jedoch nur bedingt statt (König 2009; Schuler 2013; Streit 2016b). Bruns und Eichen (2016) weisen darauf hin, dass sich der Anforderungsgrad der Aktivitäten zumeist an einem mittleren Leistungsniveau der Gruppe orientiere und damit nur einem Teil der Kinder herausfordernde Aktivitäten ermöglicht würden. Interaktionen in offenen Settings scheinen besonders dann förderlich zu sein, wenn Lehrpersonen Geduld darin zeigen, die Kinder ihre Lösungsschritte selbstständig vollziehen zu lassen, und dann gezielt eingreifen, wenn sich eine produktive Gelegenheit bietet (Wullschlegel/Stebler 2016). Über die Ursachen dieser Ergebnisse weiss man bislang noch nicht viel; die Rahmenbedingungen spielen sicherlich eine Rolle. So weist König (2009) darauf hin, dass gerade die Lehrpersonen im Kindergarten aufgrund der häufigen Wechsel der Gesprächsgegenstände und parallel stattfindenden Interaktionsprozesse hohen Belastungen ausgesetzt seien.

Es ist aber auch und gerade zu fragen, welche Kompetenzen (angehende) Lehrpersonen eigentlich benötigen, um mathematische Lernanlässe in Zyklus 1 professionell zu gestalten und die Schülerinnen und Schüler beim Aufbau grundlegender mathematischer Konzepte individuell zu begleiten. Die Herausforderungen für Lehrpersonen sind vielfältig: In offenen Lernsettings (wie z.B. im Freispiel) müssen sie für mathematikhaltige Situationen sensibel sein bzw. den mathematischen Gehalt einer solchen Situation erkennen und mathematikdidaktisch „nutzbar“ machen können. Gelenkte Settings bzw. Lektionen müssen so geplant und umgesetzt werden, dass sie das mathematische Vorwissen der Kinder angemessen berücksichtigen und zugleich den Aufbau weiterer mathematischer Fähigkeiten anregen. Für eine individuelle Unterstützung der Kinder ist darüber hinaus grundsätzlich ein Wissen darüber vonnöten, welche mathematischen Vorstellungen, Konzepte usw. das einzelne Kind schon aufgebaut hat bzw. noch aufbauen muss und wie das Kind beim Aufbau dieser Konzepte unterstützt werden kann.

Unter Berücksichtigung des theoriebasierten fachspezifischen Struktur-Prozess-Modells von Gasteiger und Benz (2016) ist anzunehmen, dass (angehende) Lehrpersonen des ersten Zyklus auf der Grundlage eines theoretischen mathematikdidaktischen und eines fundierten elementarmathematischen Wissens (für weitere Ausführungen hierzu vgl. Rüede/Streit/Royar 2016) vor allem mathematikspezifische diagnostische Kompetenzen sowie unterrichtliche Handlungskompetenzen aufbauen sollten. Im Folgenden wird eine mögliche Konzeption mathematikdidaktischer Studien skizziert. Dabei ist es das zentrale Ziel, dass die Studierenden ein theoriebasiertes handlungsnahes Wissen erwerben, welches es ihnen ermöglicht, in der Unterrichtspraxis mathematikdidaktisch begründete und reflektierte Entscheidungen treffen zu können, die einer professionellen Gestaltung und Begleitung früher mathematischer Lern-Lehr-Prozesse gerecht werden.

7 Zur Konzeption mathematikdidaktischer Studien im Rahmen eines generalistischen Studiums

Zur Konzeption mathematikdidaktischer Studien im Rahmen eines Studiums für Generalistinnen und Generalisten kann das Modell von Steinbring (1998) dienen, welches zwei zentrale Dimensionen der Mathematikdidaktik beschreibt (vgl. Abb. 3): Die konstruktive Dimension bedeutet, dass mathematische Lernumgebungen und -arrangements im weiteren Sinn theoretisch fundiert konstruiert und evaluiert werden. Die analytische Dimension bedeutet, dass Prozesse des Lernens und Lehrens von Mathematik beobachtet, erhoben und analysiert werden. Diese Dimensionen finden sich in analoger Form in der mathematischen Unterrichtspraxis, welche sowohl ein Anwendungs- als auch ein Untersuchungsfeld der Ma-

thematikdidaktik als Wissenschaft ist. Beides sind autonome Systeme, die sich dennoch indirekt wechselseitig beeinflussen.

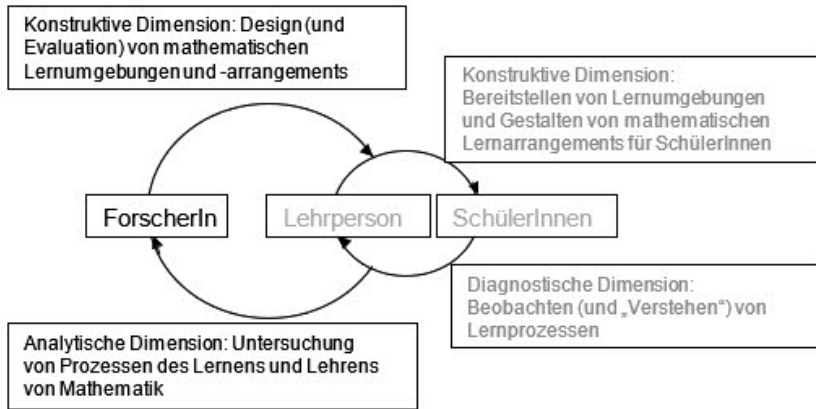


Abb. 3: Dimensionen der Mathematikdidaktik (in Anlehnung an Steinbring 1998, 165)

Das Modell stützt die Forderung, Diagnose und unterrichtliche Massnahmen aufeinander zu beziehen. (Angehende) Lehrpersonen sollen in der Lage sein, ihre unterrichtlichen Aktivitäten auf diagnostische Erkenntnisse abzustützen und Diagnose im Wissen um die Möglichkeiten der Weiterarbeit durchzuführen, was dem in Abbildung 3 auf der rechten Seite abgebildeten Kreislauf „mathematische Unterrichtspraxis“ entspricht. Die Notwendigkeit der Theoriebasiertheit eines solchen unterrichtlichen Handelns wird durch den Schnitt des Kreislaufs der Mathematikdidaktik mit jenem der Unterrichtspraxis im Fachbereich Mathematik ausgewiesen.

Die Orientierung an diesem Modell ermöglicht bei der Konzeption der mathematikdidaktischen Studien eine Fokussierung auf wesentliche Kompetenzen, die exemplarisch in ausgewählten Themenbereichen angebahnt werden können: Ausgehend von der analytisch-diagnostischen Dimension des Mathematikunterrichts (Beobachten, Analysieren und „Verstehen“ von Lernprozessen) – sollte die Ausgestaltung der mathematikdidaktischen Studien zunächst auf grundlegende mathematikdidaktisch-diagnostische Kompetenzen der Studierenden fokussieren und darauf aufbauend – ausgehend von der konstruktiven Dimension des Mathematikunterrichts (Planen, Gestalten und Begleiten von mathematischen Lernprozessen) – die mathematikunterrichtsbezogenen Handlungskompetenzen in den Blick nehmen. Ein solcher konzeptioneller Aufbau entspricht auch den Standards für die Lehrer*innenbildung im Fach Mathematik (vgl. dazu die Empfehlungen von DMV/GDM/MNU 2008).

Gestützt werden solche konzeptionellen Überlegungen durch Ergebnisse aus der Forschung: Eine angemessene Diagnose gilt als ein wichtiger Bedingungsfaktor für erfolgreiches Lehrer*innenhandeln (Artelt/Gräsel 2009). Diagnostizieren ist eine Kernaufgabe des Unterrichtens, nicht nur im Rahmen von Bewertung, sondern vor allem auch im Rahmen der Weiterarbeit im Unterricht, also bei der Planung, Organisation, Gestaltung und Reflexion von Lehr-Lern-Prozessen (Schradar 2013). Lehrpersonen müssen in unterschiedlichen Situationen Informationen über Lernvoraussetzungen, Lernprozesse und Lernergebnisse auswerten (Ingenkamp/Lissmann 2008), um pädagogische Entscheidungen treffen zu können. Aufgrund der grossen Bedeutung diagnostischer Fähigkeiten für professionelles Lehrer*innenhandeln erscheint eine Förderung dieser Fähigkeiten bereits während des Studiums notwendig. Dies umso mehr ist angezeigt, als sich Studierende zum Ende ihres Studiums nur sehr bedingt in der Lage sehen, Schüler*innenwissen adäquat zu diagnostizieren (Hilfert-Rüppell/Eghtessad/Looß/Höner/Müller 2012). Die „Experten-Novizen-Studie“ von Streit, Rüede, Weber und Graf (2018) zeigt, dass es Novizinnen und Novizen (im Gegensatz zu Expertinnen und Experten) schwerfällt, Lernstände entlang mathematikdidaktischer Konzepte und Theorien zu ermitteln und aus den Erkenntnissen der Diagnose eine anschlussfähige (unterrichtliche) Weiterarbeit abzuleiten. Um die Verbindung zwischen Diagnose und „passender“ unterrichtlicher Weiterarbeit bereits während des Studiums anzubahnen, sollten zu Beginn des Studiums diagnostische Situationen (z.B. durch den Einsatz von Videovignetten) simuliert und entlang von zugrunde liegenden mathematikdidaktischen Konzepten und Theorien analysiert sowie theoretisch begründete Überlegungen zur Weiterarbeit angestellt werden. Aufbauend auf diesen Erkenntnissen wird die Gestaltung von mathematischen Lern-Lehr-Arrangements in den Blick genommen. Dabei lernen die Studierenden, wie – auf der Basis diagnostischer Erkenntnisse – mathemathikhaltige Lernsituationen, z.B. unter Bezugnahme auf mathematikhaltige Materialien, gezielt geplant und die Kinder in der Umsetzung begleitet, unterstützt und instruiert werden können.

8 Herausforderungen der generalistischen Ausbildung aus mathematikdidaktischer Sicht

In generalistischen Studiengängen der Deutschschweiz ist der Anteil der mathematikdidaktischen Studien am Gesamtstudium im internationalen Vergleich als eher gering einzustufen. Entsprechend muss die Auswahl der Studieninhalte sehr exemplarisch erfolgen und es gilt immer zu berücksichtigen, dass in einem solchen Studiengang Absolventinnen und Absolventen in die Praxis entlassen werden, die

in erster Linie als Generalistinnen und Generalisten und nicht als Mathematiklehrpersonen ausgebildet wurden.

Unter dem Aspekt, dass gerade Kindergartenlehrpersonen auch (wenn nicht vor allem) für die Umsetzung fachbereichsübergreifender Themenstellungen sowie die Gestaltung offener Settings, die Potenzial für verschiedene Fachbereiche aufweisen (vgl. dazu auch den Beitrag von Künzli David und de Sterke in diesem Band), Handlungskompetenzen erwerben müssen, ist das Ausbildungsziel generalistisch unterrichtender Lehrpersonen nachvollziehbar und begründet. Dieser Anspruch fördert zugleich den Austausch und die Kooperation unter den verschiedenen Disziplinen bzw. Fachbereichen in Bezug auf ein möglichst kohärentes Ausbildungskonzept.

Gleichzeitig sind aber auch die Grenzen für den Aufbau fachspezifischer professioneller Kompetenzen zu sehen. Mathematisches Lernen muss – gerade auch mit Blick auf die Prävention von Rechenschwäche – gezielt angeregt und professionell begleitet werden, und zwar sowohl in fachspezifischen als auch in situativen und fachverbindenden Lernsettings. Zudem stellt sich die Frage, ob nicht gerade die grossen Herausforderungen in fachverbindenden Lehr-Lern-Situationen eine vertiefte fachliche Ausbildung benötigen. Die Konzipierung und die Begleitung solcher Settings stellen eine äusserst anspruchsvolle Aufgabe für die Lehrpersonen dar (Criblez 2000). So müssen sie beispielsweise die unterschiedlichen Zugänge und Ansätze aus verschiedenen Disziplinen zueinander in Beziehung setzen und hinsichtlich ihrer Relevanz für eine fachverbindende Fragestellung und die damit verbundenen fachlichen Voraussetzungen einschätzen können.

Für die Ausbildung setzt dies eine intensive Abstimmung der verschiedenen Fachbereiche voraus, damit für die Studierenden die Vielfalt der unterschiedlichen Weltzugänge (systematisch) erfahrbar wird und sie im Aufbau eines zielstufenspezifischen Professionsverständnisses unterstützt werden können (vgl. dazu auch den Beitrag von Bachmann et al. in diesem Band). Zu bedenken ist dabei allerdings, dass solch umfassende Kompetenzen, die Lehrpersonen dieser Zielstufe für die professionelle Ausübung ihrer Tätigkeit im Spannungsfeld von fachspezifischem und fachverbindendem Lernen und Lehren benötigen, im Rahmen eines sechsemestrigen generalistischen Studiums nur bedingt erworben werden können. Als möglicher Ausweg aus diesem Dilemma erscheint ein Masterstudiengang, der eine Ausbildung für Generalistinnen und Generalisten mit der Möglichkeit einer fachlichen Vertiefung verbindet.

Literatur

- Artelt, C. & Gräsel, C. (2009): Diagnostische Kompetenz von Lehrkräften. In: Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 23. Jg., 157-160.
- Basieux, P. (2000): Die Architektur der Mathematik: Denken in Strukturen. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt.
- Behrens, E. (2010): Ist Mathematik die Sprache der Natur? In: Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, 29. Jg., 53-70.
- Beutler, B. (2013): Zerlegen und Zusammensetzen. Fähigkeiten von Vorschulkindern beim Umstrukturieren von Bauwerken unter Berücksichtigung von Teil-Ganzes-Beziehungen. In: *mathematica didactica*, 36. Jg., 242-271.
- Bruner, J. S. (1973): Der Prozess der Erziehung. Berlin: Schwann.
- Brunner, E. (2014): Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen: Grundlagen, Befunde und Konzepte. Heidelberg: Springer.
- Bruns, J. & Eichen, L. (2016): Individuelle Förderung im Kontext früher mathematischer Bildung. In: S. Schuler, C. Streit & G. Wittmann (Hrsg.), *Perspektiven mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule*. Wiesbaden: Springer, 125-138.
- Criblez, L. (2000): Für eine fachwissenschaftliche Ausbildung von Primarlehrerinnen und Primarlehrern. In: *Beiträge zur Lehrerinnen- und Lehrerbildung*, 18. Jg. (H. 1), 36-38.
- Dehaene, S. (1999): *Der ZAHLENSINN oder warum wir rechnen können*. Basel: Birkhäuser.
- Devlin, K. (1998): *Muster der Mathematik*. Heidelberg: Spektrum.
- Devlin, K. (2001): *Das Mathe-Gen*. Stuttgart: Klett-Cotta.
- DMV, GDM & MNU (2008): Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik. Empfehlungen von DMV, GDM, MNU 2008. Tübingen: DMV.
- Freudenthal, H. (1973): *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Band 1. Stuttgart: Klett.
- Gasteiger, H. & Benz, C. (2016): Mathematikdidaktische Kompetenz von Fachkräften im Elementarbereich – ein theoriebasiertes Kompetenzmodell. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37. Jg. (H. 2), 263-287.
- Haug, R. & Wittmann, G. (2013): Materialien wachsen mit. Muster und Strukturen vom Kindergarten bis zur Sekundarstufe I. In: *mathematik lehren*, 30. Jg. (H. 176), 8-13.
- Heinze, A. & Grüßing, M. (Hrsg.) (2009): *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht*. Münster: Waxmann.
- Hefendehl-Hebeker, L. (1999): Erleben, wie arithmetisches Wissen entsteht. In: C. Selzer & G. Walther (Hrsg.), *Mathematikdidaktik als Design Science*. Festschrift für Erich Christian Wittmann. Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag, 105-111.
- Hilfert-Rüppell, D., Eghtessad, A., Looß, M., Höner, K. & Müller, R. (2012): Kompetenzentwicklung in der LehrerInnenbildung – Empirische Studien zum Professionalisierungsprozess in den naturwissenschaftlichen Fächern der Lehramtsstudiengänge. In: *Lehrerbildung auf dem Prüfstand*, 5. Jg. (H. 2), 157-179.
- Huylebrouck, D. (2006): Afrika, die Wiege der Mathematik. In: *Spektrum der Wissenschaft*, (H. 2), Spezial: Ethnomathematik, 10-15.
- Ingenkamp, K. & Lissmann, U. (2008): *Lehrbuch der pädagogischen Diagnostik*. Weinheim: Beltz.
- Janhke, H. N. & Ufer, S. (2015): Argumentieren und Beweisen In: R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Berlin: Springer Spektrum, 331-356.
- Jetter, K. (1982): Mathematik – Rechnen. Thesen zur Entwicklung des mathematischen Denkens. In: *Zeitschrift des Arbeitskreises Kooperative Pädagogik*, (H. 1), 66-73.
- König, A. (2009): Interaktionsprozesse zwischen ErzieherInnen und Kindern. Eine Videostudie aus dem Alltag des Kindergartens. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

- Linchevski, L. & Livneh, D. (1999): Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. In: *Educational Studies in Mathematics*, 40. Jg. (H. 2), 173-196.
- Lindmeier, A., Brunner, E., Grüßing, M. & Heinze, A. (2017): Wie kann mathematisches Argumentieren bei 5-6-jährigen Kindern aussehen? In: U. Kortenkamp & A. Kuzle (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Münster: WTM-Verlag, 609-612.
- Lüken, M. (2012): Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht. Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern. Münster: Waxmann.
- Meyer, M. & Prediger S. (2009): Warum? Argumentieren, Begründen, Beweisen. In: *Praxis der Mathematik in der Schule*, 51. Jg. (H. 30), 1-7.
- Nelsen, R. B. (2016): *Beweise ohne Worte* (herausgegeben von N. Oswald). Berlin: Springer.
- Penrose, R. (2010): *Der Weg zur Wirklichkeit*. Heidelberg: Spektrum.
- Resnick, L. B. (1983): A developmental theory of number understanding. In: H. P. Ginsburg (Hrsg.), *The development of mathematical thinking*. New York: Academic Press, 109-151.
- Resnick, L. B. (1992): From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. In: G. Leinhardt, R. Putnam & R. A. Hattup (Hrsg.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 373-429.
- Royar, T., Schuler, S., Streit, C. & Wittmann, G. (2016): *MATHElino – Mathematiklernen im Übergang vom Kindergarten in die Grundschule*. In: S. Schuler, C. Streit & G. Wittmann (Hrsg.), *Perspektiven mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 91-104.
- Royar, T. & Streit, C. (2010): *MATHElino – Kinder begleiten auf mathematischen Entdeckungswegen*. Seelze: Friedrich Verlag Kallmeyer.
- Rüede, C., Streit, C. & Royar, T. (2016): Ein Modell des mathematischen Lehrerwissens als Orientierung für die mathematische Ausbildung im Lehramtsstudium der Grundschule. In: A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase*. Wiesbaden: Springer, 619-641.
- Schäfer, J. (2012): „Die gehören doch zur Fünf!“ „Teil-Ganzes-Verständnis und seine Bedeutung für die Entwicklung mathematischen Verständnisses. In: J. Sprenger, A. Wagner & M. Zimmermann (Hrsg.), *Mathematik lernen – darstellen – deuten – verstehen. Didaktische Sichtweisen vom Kindergarten bis zur Hochschule*. Wiesbaden: Springer, 79-97.
- Schrader, F.-W. (2013): Diagnostische Kompetenz von Lehrpersonen. In: *Beiträge zur Lehrerinnen- und Lehrerbildung*, 31. Jg. (H. 2), 154-165.
- Schuler, S. (2013): *Mathematische Bildung im Kindergarten in formal offenen Situationen*. Münster: Waxmann.
- Steinbring, H. (1998): *Mathematikdidaktik: Die Erforschung theoretischen Wissens in sozialen Kontexten des Lernens und Lehrens*. In: *ZDM*, 30. Jg., 161-167.
- Stern, E. (2005): Kognitive Entwicklungspsychologie des mathematischen Denkens. In: M. van Aster & J. H. Lorenz (Hrsg.), *Rechenstörungen bei Kindern: Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 137-149.
- Streit, C. (2010): Fundamentale Ideen der Mathematik – auch im Kindergarten? *TPS*, 13. Jg. (H. 10), 4-7.
- Streit, C. (2016a): Lernbegleitung in materialbasierten Settings. *Mathematikhaltige Situationen erkennen und nutzen, TPS*, 19. Jg. (H. 8), 34-37.
- Streit, C. (2016b): Wie Lehrpersonen Kinder in materialbasierten Settings begleiten und mathematische Lernprozesse anregen. In: S. Schuler, C. Streit & G. Wittmann (Hrsg.), *Perspektiven mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule*. Berlin: Springer, 161-174.
- Streit, C. & Künzli David, C. & Hildebrandt, E. (2014): Besonderheiten des Lernens und Lehrens auf der Bildungsstufe der 4- bis 8-Jährigen – ein Diskussionsbeitrag. In: E. Hildebrandt, M. Peschel &

- M. Weißhaupt (Hrsg.), Lernen zwischen Lernen zwischen freiem und instruiertem Tätigsein. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, 17-31.
- Streit, C., Rüede, C., Weber, C. & Graf, B. (2018): Zur Verknüpfung von Lernstandeinschätzung und Weiterarbeit im Arithmetikunterricht: Ein kontrastiver Vergleich zur Charakterisierung diagnostischer Expertise. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, 40. Jg. (H. 1), 37-62.
- Vohns, A. (2007): Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht: Entwicklung und Perspektiven einer fachdidaktischen Kategorie. Norderstedt: BoD.
- Winter, H. (1994): Modelle als Konstrukte zwischen lebensweltlichen Situationen und arithmetischen Begriffen. In: *Grundschule*, H. 3, 10-13.
- Winter, H. (2001): Fundamentale Ideen in der Grundschule. Online unter: <http://www.schulabakus.de/Wechselspiele/winter-ideen.html>.
- Wittmann, E. Ch. (2014): Operative Beweise in der Schul- und Elementarmathematik. In: *Mathematica didactica*, 37. Jg., 213-232.
- Wullschleger, A. & Stebler, R. (2016): Individuelle mathematikbezogene Lernunterstützung bei Regelspielen zur Förderung früher Mengen-Zahlen-Kompetenzen im Kindergarten. In: S. Schuler, C. Streit & G. Wittmann (Hrsg.), *Perspektiven mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule*. Wiesbaden: Springer, 175–190.
- Wynn, K. (1990): Children's understanding of counting. In: *Cognition*, 36. Jg., 155–193.